Matemáticas Discretas (MA-3421)

Guía de Ejercicios N° 5

1.- Considere el grafo G = (V,E) con V = {1,2,3,4,5} y E = $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, donde $a = \{1,2\}$, $b = \{2,3\}$, c= {3,5}, $d = \{2,5\}$, $e = \{2,4\}$, $f = \{4,5\}$, $g = \{1,4\}$ y $h = \{1,5\}$.

(a) Dibuje el grafo G.

(b) Encuentre las matrices de adyacencia e incidencia.

(c) Encuentre el grado de cada vértice.

2.- Si el grafo $K_{m,12}$ tiene 72 lados, ¿cuánto vale m?

3.- Determine el valor de $|V|$ para los siguientes grafos o multígrafos:

(a) G tiene 9 lados y todos los vértices tienen grado 3.

(b) G es regular con 15 lados.

(c) G tiene 10 lados con dos vértices de grado 4 y los demás de grado 3.

4.- Sea G = (V,E) un grafo no dirigido, conexo, sin lazos, 3-regular. Si $|E| = 2|V| - 6$, ¿cuánto valen $|E|$ y $|V|$?

5.- (a) Explique por qué no es posible dibujar un grafo no dirigido, conexo, sin lazos con 8 vértices, tal que los grados de los vértices sean 1,1,1,2,3,4,5 y 7.

(b) Dé un ejemplo de un multígrafo no dirigido, conexo, sin lazos con 8 vértices donde los grados de los vértices sean 1,1,1,2,3,4,5 y 7.

6.- Pruebe que si G es un grafo sin lazos ni lados múltiples con *n* vértices y *m* lados, entonces $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

7.- Pruebe que si G y H son grafos isomorfos, entonces $|V(G)| = |V(H)|$ y $|E(G)| = |E(H)|$. Dé un ejemplo que muestre que el recíproco es falso.

8.- Sea $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

(a) Dibuje los cuatro posibles grafos no isomorfos no dirigidos sin lazos $G_i = (V, E_i)$, para $1 \leq i \leq 4$ tales que, en los cuatro grafos se tenga que $\delta(a) = 5$, $\delta(b) = 3$ $\delta(c) = \delta(d) = \delta(e) = 2$ y $\delta(f) = \delta(g) = 1$.

(b) ¿Cuántos de los grafos de la parte (a) son conexos?

9.- Si un grafo tiene *n* vértices y *m* lados, ¿cuántos subgrafos recubridores tiene?

10.- Pruebe que $K_{m,n}$ es isomorfo a $K_{n,m}$.

11.- Sea G = (V,E) un grafo conexo

(a) ¿Cuál es el mayor posible para $|\mathrm{V}|$ si $|\mathrm{E}| = 19$ y $\delta(v) \geq 4$ para todo $v \in \mathrm{V}$?

(b) Trace un grafo para mostrar cada caso posible de (a).

12.- Encuentre todos los subgrafos recubridores conexos de $K_{2,3}$.

13.- (a) Sea G un grafo con *n* vértices. Si G es isomorfo a $\overline{\mathrm{G}}$, ¿cuántos lados debe tener? (este grafo se llama autocomplementario).

(b) Dé un ejemplo de grafo autocomplementario con 4 vértices y otro con 5 vértices.

14.- Dé ejemplos de:

(a) Un grafo G tal que G sea conexo y $\overline{\mathrm{G}}$ sea disconexo.

(b) Un grafo G tal que G y $\overline{\mathrm{G}}$ sean conexos.

(c) Dos grafos G_1 y G_2, ambos con 5 vértices y 6 lados y que no sean isomorfos.

(d) Un grafo conexo, 3-regular, sin lazos y con 8 vértices.

15.-(a) Dé un ejemplo de un grafo conexo G tal que al eliminar cualquier lado de G se obtenga un grafo disconexo.

(b) Si G satisface la condición de (a) , ¿puede G tener lazos?, ¿puede G ser un multígrafo?

(c) Si G satisface (a) y tiene *n* vértices, ¿se puede determinar cuántos lados tiene?

16.- Si G es un grafo, ¿cuántos subgrafos recubridores de G son también subgrafos inducidos?

17.- Sea $X = \{1,2,3,4,5\}$. Construya el grafo G como sigue:

V(G): Cada subconjunto de dos elementos de X representa un vértice.

E(G): Si $v_1, v_2 \in \mathrm{V(G)}$, corresponden a los subconjuntos $\{a, b\}$ y $\{c, d\}$ respectivamente, se traza el lado $\{v_1, v_2\}$ si $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$.

(a) Pruebe que G es isomorfo al grafo de Petersen.

(b) Muestre que si $X = \{1,2,3\}$ o $X = \{1,2,3,4\}$, entonces G es disconexo.

18.- Hallar $\overline{K_{3,3}}$.